page 48 1987 E.N.S. de LYON Opt. Sc. Phys.

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 5 heures

NOTA. — *Il est rappelé aux candidats qu'aucune démonstration vague ou mal rédigée ne sera prise en considération. Les candidats devront s'attacher notamment à supprimer tout argument inutile. La présentation de la copie sera prise en compte dans le barème.*

Les calculatrices programmables sont autorisées. Cependant, il ne sera pas tenu compte des résultats numériques lorsque le candidat n'aura pas précisé comment il les avait obtenus.

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II; seule la fin de la partie IV utilise les résultats de la partie III.

I

Dans un espace physique muni d'une pesanteur, on considère un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté aux axes Ox (horizontal) et Oy (vertical ascendant). On désigne par Γ_n une ligne brisée contenue dans $\mathcal{P}$ formée de n tiges articulées pesantes homogènes identiques. La longueur totale de Γ_n est égale à L, celle de chaque tige étant donc égale à $\frac{L}{n}$. On note $A_0, A_1, \ldots, A_n$ les sommets de la ligne brisée. Les extrémités A_0 et A_n sont fixées une fois pour toutes et coïncident avec les points $(-a, 0)$ et $(a, 0)$ respectivement, où a est un réel strictement positif tel que $2a < L$.

À toute position de Γ_n dont les extrémités sont ainsi fixées, on associe le n-uplet $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$, où θ_j est l'angle $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{A_{j-1}A_j})$, $-\pi \leqslant \theta_j < \pi$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

1° Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le n-uplet $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ pour qu'il définisse une position et une seule de Γ_n.

2° Calculer en fonction de $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ l'ordonnée h_n du centre de gravité de Γ_n dans cette position.

3° Prouver l'existence d'au moins un n-uplet $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ tel que $h_n(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ soit un minimum absolu de h_n (on pensera à prolonger la fonction h_n ainsi que la condition du 1° aux valeurs $\theta_j = \pi$).

On admettra par la suite que ce n-uplet est unique. Montrer alors qu'il correspond nécessairement à une position de Γ_n symétrique par rapport à Oy, c'est-à-dire telle que $\theta_j + \theta_{n+1-j} = 0$ ou $\theta_j = \theta_{n+1-j} = -\pi$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

On se limitera désormais à l'étude des positions de Γ_n *symétriques par rapport à* Oy. On posera dans la suite $n = 2q + \nu$, où $q \in \mathbb{N}$, $\nu = 0$ ou 1. Une telle position de Γ_n est alors caractérisée par $\theta_1, \ldots, \theta_q$.

4° *a.* Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $\theta_1, \ldots, \theta_q$ pour que ces nombres définissent une position de Γ_n symétrique par rapport à Oy (on distinguera deux cas selon la parité de n).

b. Calculer h_n en fonction de $\theta_1, \ldots, \theta_q$.

5° *a.* Montrer que s'il existe $j \in \{1, \ldots, q\}$ tel que $\theta_j \in]0, \pi[$, h_n n'est pas minimum.

b. Soient M, N, P trois points du plan $\mathcal{P}$, le point M étant fixé, le point P étant variable sur une droite Δ de $\mathcal{P}$ et les distances MN et NP restant constamment égales à l. Soit $(I, \vec{u})$ un repère affine de Δ. Montrer que si les angles $\alpha = (\vec{u}, \overrightarrow{MN})$ et $\beta = (\vec{u}, \overrightarrow{NP})$ vérifient $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ et $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $\overline{IP}$ est une fonction strictement croissante de α.

c. En déduire que s'il existe $j \in \{1, \ldots, q-1\}$ tel que $\theta_j \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ et $\theta_{j+1} \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ alors h_n n'est pas minimum (on pourra choisir une droite Δ parallèle à Oy).

d. On suppose que $\theta_j \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ pour tout $j \in \{1, \ldots, q\}$. Montrer que s'il existe j tel que $\theta_j > \theta_{j+1}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$, alors h_n n'est pas minimum.

e. Montrer que si n est impair et si $\theta_{q+1} = -\pi$, alors h_n n'est pas minimum.

f. En déduire que la position de Γ_n réalisant le minimum de h_n est telle que :

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \ldots \leqslant \theta_q \leqslant 0 \quad \text{si } n = 2q \quad \text{ou} \quad \text{si } n = 2q+1 > \frac{L}{2a};$$

$$-\frac{\pi}{2} > \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \ldots \geqslant \theta_q \geqslant -\pi \quad \text{si } n = 2q+1 < \frac{L}{2a};$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_q = -\frac{\pi}{2} \quad \text{si } n = 2q+1 = \frac{L}{2a}.$$

Tournez la page S. V. P.

II

On reprend les hypothèses et les notations du I. On se limite dans cette partie aux valeurs de n correspondant au premier cas du I. 5° f, c'est-à-dire $n = 2q$ ou bien $n = 2q + 1 > \dfrac{L}{2a}$.

1° *a.* Montrer que la recherche de la position de Γ_n réalisant le minimum de h_n est équivalente à la recherche du minimum d'une fonction de $q-1$ variables sur un ouvert de $\mathbb{R}^{q-1}$.

b. Écrire les conditions différentielles nécessaires à ce minimum et montrer qu'on peut les mettre sous la forme :

$$(1 + \nu) \operatorname{tg} \theta_j = (n - 2j + 1) \operatorname{tg} \theta_q , \qquad j = 1, ..., q,$$

où on a posé comme plus haut $n = 2q + \nu$.

c. Compte tenu de la condition du I. 4° *a*, écrire l'équation satisfaite par $\operatorname{tg} \theta_q$ et celle satisfaite par $\operatorname{tg} \theta_1$.

2° Lorsque $L = 5a$, calculer $\operatorname{tg} \theta_q$ avec une précision de 0,1 pour $n = 3$, $n = 4$ et $n = 7$. Tracer sur une même figure les positions correspondantes de Γ_3, Γ_4 et Γ_7.

3° Dans toute la fin de cette partie, on considère la suite, lorsque n varie, des positions de Γ_n réalisant le minimum de h_n. On écrira au besoin $\theta_j(n)$ au lieu de θ_j pour préciser à quel indice on se réfère. Pour tout $n > 1$ et tout réel $\mu > 0$, on pose :

$$S_n(\mu) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{n - 2k + 1}{n - 1}\right)^2 \mu^2}} .$$

a. En utilisant le fait que la fonction $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$ est monotone pour $t \geqslant 0$, montrer que :

$$\left| \int_0^{\mu} f(t)\, dt - \frac{2\mu}{n-1} S_n(\mu) \right| \leqslant \frac{4\mu}{n-1} .$$

b. Montrer que la fonction : $F(\mu) = \dfrac{1}{\mu} \displaystyle\int_0^{\mu} f(t)\, dt$

est monotone pour $\mu > 0$.

c. Établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} F(\operatorname{tg} \theta_1(n)) = \dfrac{2a}{L}$ et en déduire que la suite $(\theta_1(n))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite $\psi \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$.

d. Lorsque $L = 5a$, calculer $\operatorname{tg} \psi$ avec une précision de 0,1.

4° Pour tout $s \in \left[0, \dfrac{L}{2}\right]$, on considère le point $M_n(s)$ de coordonnées $(x_n(s), y_n(s))$, situé sur Γ_n (dans la position où h_n est minimum) à une distance s de A_0 (distance comptée le long de Γ_n); par conséquent, $M_n(s)$ est sur la tige $A_j A_{j+1}$ de Γ_n où j est la partie entière de $\dfrac{ns}{L}$.

a. Calculer $x_n(s)$ et $y_n(s)$ en fonction des $\theta_j(n)$, puis en fonction seulement de $\operatorname{tg} \theta_1(n)$.

b. Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, $x_n(s)$ tend vers :

$$x(s) = -a + L \int_0^{\frac{s}{L}} \frac{du}{\sqrt{1 + (1 - 2u)^2 \operatorname{tg}^2 \psi}}$$

et $y_n(s)$ tend vers : $\quad y(s) = L \displaystyle\int_0^{\frac{s}{L}} \frac{(1 - 2u) \operatorname{tg} \psi \, du}{\sqrt{1 + (1 - 2u)^2 \operatorname{tg}^2 \psi}}$.

c. Calculer ces deux intégrales et en déduire $y(s)$ en fonction de $x(s)$ [on pourra remarquer pour simplifier le calcul que $x_n\left(\dfrac{L}{2}\right) = 0 \ \forall\, n > 1$].

III

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad 1 + u'^2 + (\lambda - u)\, u'' = 0$$

où λ est une constante réelle. On cherche les solutions de l'équation (E) définies et de classe C^2 sur un voisinage $]-a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ du segment $[-a, a]$ $(a > 0)$.

1° Montrer que si u est une telle solution, alors $u''(t) \neq 0$ pour tout $t \in]-a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. En déduire que u' est un difféomorphisme de classe C^1 de $]-a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ sur son image J par u'.

2° À l'aide du changement de variable $z = u'(t)$, montrer que la recherche des solutions de (E) sur $]-a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est équivalente à celle des solutions sur J de l'équation :

$$(E_1) \qquad (1 + z^2) \frac{du}{dz} + (\lambda - u) z = 0 .$$

3° *a.* Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1).

Tournez la page S. V. P.

E.N.S. de LYON
Opt.Sc.Phys.-
page 49
1987

b. Préciser quelles sont les solutions u de (E) qui satisfont :

$$u(a) = u(-a) = 0.$$

IV

Soit $\mathcal{A}$ l'espace vectoriel des fonctions réelles sur $[-a, a]$, de classe C^1, nulles en $-a$ et en $+a$. Pour tout $u \in \mathcal{A}$ on pose :

$$\|u\| = \sup \{ |u'(t)| ; t \in [-a, a] \}.$$

1° Montrer que $u \longrightarrow \|u\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{A}$.

2° Trouver une fonction $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow G(x, y)$, telle que, pour tout $u \in \mathcal{A}$, la longueur du graphe de u soit :

$$\Lambda(u) = \int_{-a}^{+a} G(u(t), u'(t))\, dt.$$

3° On pose $\mathcal{B} = \{ u \in \mathcal{A}; \Lambda(u) = L \}$, où L est un nombre donné strictement positif, $L > 2a$. Trouver une fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \longrightarrow F(x, y)$, telle que, pour tout $u \in \mathcal{B}$, l'ordonnée du centre de gravité du graphe de u soit :

$$h(u) = \frac{1}{L} \int_{-a}^{+a} F(u(t), u'(t))\, dt.$$

4° Soit $u \in \mathcal{B}$ une fonction de classe C^2 qui est un minimum local dans $\mathcal{B}$ pour h. On admettra qu'une telle fonction existe et qu'elle satisfait la condition (C) suivante :

(C) il existe un réel λ tel que, si on pose $H(x, y) = F(x, y) - \lambda G(x, y)$, alors on a :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(u(t), u'(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial H}{\partial y}(u(t), u'(t))\right] = 0.$$

En déduire que u est solution de l'équation différentielle (E) étudiée dans la partie II.

5° Trouver toutes les fonctions $u \in \mathcal{B}$ satisfaisant à la condition (C). Interpréter physiquement ce résultat et le comparer à celui obtenu dans le II.4° *c.*

• • •